

Programa

- 1. Introdução**
- PARTE 1 **Campos de onda**
- 2. Sinais no espaço e no tempo**
 - 2.1 Equação de onda
 - 2.2 Propagação de ondas planas
 - 2.3 Distorsão de ondas planas
 - 2.3.1 *Efeito doppler*
 - 2.3.2 *Dispersão*
 - 2.3.3 *Atenuação*
 - 2.3.4 *Refração*
 - 2.3.5 *Difração*
 - 2.3.6 *Velocidade de fase e velocidade de grupo*
- 3. Representação frequencial de campos de onda**
 - 3.1 Introdução
 - 3.2 Espaço de número de onda
 - 3.3 Espectro número de onda de uma onda plana
 - 3.4 Espectros número de onda particulares
 - 3.5 Filtragem no espaço número de onda
 - 3.6 Campos de onda aleatórios
- 4. Processamento de antenas de geometria variável**
 - 4.1 Introdução: aberturas e filtros
 - 4.2 Resolução, picos laterais e ambiguidades
 - 4.3 Focalização e aberrações
 - 4.4 Amostragem espacial e antenas discretas
 - 4.5 Antenas lineares e aleatórias
- 5. Processamento multicanais**
 - 5.1 Sinais e ruído
 - 5.2 Processamento multicanais coerente
 - 5.3 Beamforming
 - 5.4 Beamforming no domínio da frequência
- PART 2 **Underwater Acoustic Propagation Modelling**

Programa a definir pelo Prof. M.Porter, do New Jersey Institute of Technology, encarregado deste módulo de ensino, que terá lugar durante o mês de Janeiro de 1996, no âmbito de uma bolsa de cientista convidado do programa PRAXIS XXI, já aprovada e em curso.

1. Introdução

A maior parte dos cursos básicos de introdução ao processamento do sinal referem-se ao estudo e representação da evolução de uma grandeza em função do tempo. Podemos conceber, porém, a necessidade da representação espacial das grandezas que nos rodeiam, tal como nós as sentimos, ouvimos e vemos através dos nossos órgãos de sentidos. Assim, podem ser funções do espaço grandezas como a temperatura, o nível sonoro, a cor, o odor, etc... Estas grandezas para além de apresentar uma variação espacial poderão também apresentar uma variação temporal. Serão assim funções multivariáveis: coordenadas espaciais e o tempo. Veremos ao longo deste módulo de ensino como podemos representar este tipo de funções - campos de onda - como podem ser caracterizadas as suas evoluções (no espaço e no tempo) e também quais podem ser os fenómenos perturbadores da sua evolução. Mais adiante veremos como poderemos fazer para captar a informação contida nestes campos de onda e quais os métodos de extração do sinal útil a empregar.

Uma das aplicações mais importantes de tal estudo são o processamento dos sinais sonar e radar. Tanto num caso como no outro trata-se de extrair a informação útil contida num campo de ondas espaço-temporal. Entre os dois casos - sonar e radar - os métodos empregues e a teoria subjacente é idêntica variando apenas o meio de propagação - água e ar respectivamente - e, portanto, as frequências utilizadas e os aparelhos de emissão/recepção. Por questões de facilidade e para evitar confusão utilizaremos apenas exemplos do domínio do sonar fazendo algumas referências ao radar sempre que necessário.

PARTE 1: Campos de onda

2. Sinais no espaço e no tempo

Sensores acústicos, luminosos, de temperatura ou outros medem geralmente valores diferentes em diferentes pontos do espaço e a diferentes instantes do tempo. Esta variabilidade espacio-temporal só poderá ser completamente captada se dispusermos de vários sensores estrategicamente distribuídos espacialmente e efectuando medidas a intervalos regulares no tempo. Neste caso dizemos que estamos em presença de um campo de onda (acústica, luminosa, ...) e o nosso conjunto de sensores representa uma antena. A extracção da informação útil do campo de ondas captado na antena necessita o *processamento* coerente dos sinais recebidos nos diferentes sensores. Coerente, significa que no processamento se deverá ter em conta os sinais recebidos e a posição relativa dos sensores e por isso toma o nome de processamento de antenas (*array signal processing*).

O processamento de antenas, cujo objectivo é de extrair a informação do campo de ondas, depende grandemente no modo como o meio de propagação modifica o sinal entre a fonte e a antena. Por outras palavras, o processamento de antenas responde á seguinte questão: através da solução da equação de onda para uma determinada situação fonte/meio/antena como poderá ser melhor extraída a informação levada pelo sinal ?

2.1 Equação de onda

A propagação de ondas encontra-se sempre que uma força é aplicada num ponto do espaço. As ondas propagam-se a partir do ponto de aplicação da força e transportam a energia transmitida através do movimento das particulas elementares do meio de propagação. O exemplo comum mais utilizado é o da pedra lançada na água calma de um lago. Criam-se uma série de ondas sinusoidais concêntricas e que se propagam *progressivamente* a partir do ponto de queda da pedra afastando-se deste em circulos. Muitas vezes as ondas que se propagam no espaço são chamadas *ondas progressivas* por distinção das ondas estacionárias que veremos mais adiante.

No exemplo do lago as ondas sinusoidais que se afastam do ponto de impacto da pedra são circulos concêntricos. Porém, num meio de propagação infinito ideal e a uma grande distância da fonte, (ponto de aplicação da força) pode-se admitir que um observador medirá essencialmente “uma frente de onda” plana e não circular (esférica no caso geral a três dimensões). Para o observador uma frente de onda é constituída por um conjunto de pontos que se move de maneira coerente, i.e., os atrasos relativos entre os pontos são constantes ao longo do tempo. Se os atrasos entre os pontos formam uma progressão linear diz-se que a frente de onda é plano. Estas são ondas planas coerentes.

A equação de onda, i.e., a equação que determina a variação do campo de ondas escalar $s(\mathbf{r}, t)$ no

espaço escreve-se

$$\nabla^2 s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2 s(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

e \mathbf{r} é o vector que indica o ponto no espaço onde é medido o campo de onda $s(\mathbf{r}, t)$. $c(\mathbf{r})$ é um escalar que corresponde á velocidade de propagação da onda no meio e é uma função do ponto \mathbf{r} no espaço. A equação (2.1) determina a amplitude do campo de onda em qualquer ponto do espaço e portanto determina a passagem da energia do emissor para o receptor a qualquer momento.

2.2 Propagação de ondas planas

A solução de (2.1) no caso geral pode ser bastante complexa o que leva a que na maior parte dos problemas se suponha que o campo de onda possa ser descrito separadamente para cada uma das variáveis, i.e.,

$$s(\mathbf{r}, t) = f(x)g(y)h(z)p(t) \quad (2.3)$$

podendo-se então exprimir, no caso mais simples, como uma solução sob a forma exponencial do tipo separável

$$s(\mathbf{r}, t) = A \exp[j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)] \quad (2.4)$$

onde A é uma constante complexa e k_x , k_y , k_z e ω são constantes reais. Substituindo (2.4) em (2.1) obtém-se

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r})} \quad (2.5)$$

que se for satisfeita significa que (2.4) é uma solução de (2.1). A forma de onda (2.4) é frequentemente chamada onda plana elementar medida num determinado ponto referenciado pelo vector \mathbf{r} a partir de uma origem arbitraria. Usando uma notação vectorial para $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ obtém-se

$$s(\mathbf{r}, t) = e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (2.6)$$

onde $\omega = 2\pi f$ é a pulsação radial e \mathbf{k} é o vector número de onda definido por

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} \quad (2.7)$$

onde $\lambda = cT$ é o comprimento de onda, que se obtém pelo produto entre a velocidade de propagação $c(\mathbf{r})$ e o periodo T e \mathbf{n} é o vector unitário perpendicular á frente de onda e que é portanto também a orientação de \mathbf{k} . Como interpretação de (2.6) podemos dizer que se trata de uma onda elementar que transporta uma frequência monocromática f na direção de \mathbf{k} . O nome de onda plana deve-se ao facto que a um determinado tempo t_0 o campo de onda $s(x, y, z, t_0)$ é o mesmo em todos os pontos do espaço dum mesmo plano definido por $k_x x + k_y y + k_z z = C$ onde C é uma constante. Em regra

geral, particularidades do meio de propagação considerado permitem uma maior simplificação da equação de onda como por exemplo a de considerar que a velocidade de propagação $c(\mathbf{r})$ é constante em qualquer ponto do espaço (espaço homogêneo) ou que, por exemplo, só depende de uma das coordenadas (x, y, z) .

É importante considerarmos agora o caso em que o sinal $s(\mathbf{r}, t)$ que verifica a equação de onda se escreve como função de uma só variável. Assim se fizermos $u = t - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}$, podemos escrever

$$s(u) = A \exp(j\omega u), \quad (2.8)$$

onde o vector $\boldsymbol{\alpha}$ tem a mesma direção que \mathbf{k} , mas o seu módulo é $|\boldsymbol{\alpha}| = |\mathbf{k}|/\omega$. Como a equação de onda é linear, a soma de duas soluções $s_1(\mathbf{r}, t)$ e $s_2(\mathbf{r}, t)$ é ainda uma solução da mesma equação. De uma forma geral a onda

$$s(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \exp[jn\omega_0(t - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})] \quad (2.9)$$

decomposição em série complexa de uma frequência fundamental ω_0 é ainda uma solução. Como qualquer sinal de período $T_0 = 2\pi/\omega_0$ pode ser posto sob a forma (2.9), podemos então dizer que qualquer sinal periódico, independentemente da sua forma, é solução da equação de onda. A extensão ao caso geral de sinais aperiódicos é fácil pois usando o integral de Fourier podemos escrever $s(\mathbf{r}, t)$ como uma superposição de soluções da equação sob a forma

$$s(\mathbf{r}, t) = s(t - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \exp[j\omega(t - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})] d\omega. \quad (2.10)$$

A representação frequencial de $s(u)$ não é mais do que

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(u) e^{-j\omega u} du. \quad (2.11)$$

Em resumo podemos dizer, porque a equação de onda é linear e porque exponenciais complexas são solução da equação de onda, que qualquer sinal, independentemente da sua forma, é solução da equação de onda.

2.3 Distorsão de ondas planas

2.3.1 Efeito doppler

Quando a fonte ou receptor de um sinal se movem um em relação ao outro a frequência do sinal recebido no receptor não é idêntica á do sinal emitido na fonte: este efeito é conhecido por efeito doppler. O exemplo mais conhecido é o do carro muito veloz que passa junto a um observador

parado: quando o carro se aproxima o ruído é agudo e quando se fasta é de tonalidade mais grave. Houve uma mudança da frequência do sinal recebido sem ter havido nenhuma mudança do sinal emitido !

A explicação matemática do efeito Doppler encontra-se em qualquer livro básico de física e não será repetida aqui. Limitar-nos-emos a dar as fórmulas de transformação que são para o caso relativista, i.e., $v \ll c$ onde v é a velocidade relativa entre a fonte e o receptor é

$$\omega' = \omega \left[\frac{1 - (\mathbf{k}/c) \cdot \mathbf{v}_{\text{receptor}}}{1 - (\mathbf{k}/c) \cdot \mathbf{v}_{\text{fonte}}} \right] \quad (2.12)$$

e no caso contrário (não-relativista)

$$\omega' = \omega [1 - (\mathbf{k}/c) \cdot (\mathbf{v}_{\text{receptor}} - \mathbf{v}_{\text{fonte}})] \quad (2.13)$$

onde ω' é a pulsação recebida no receptor e ω a pulsação emitida na fonte.

2.3.2 Dispersão

O fenómeno de dispersão é ligado ao facto de em algumas situações de propagação (frequentes na prática) o sinal recebido exibir alterações em fase e amplitude variáveis com a frequência.

O efeito de dispersão está ligado á forma da equação (2.5) onde existe uma relação linear entre o numero de onda k e a frequência ω . Se o meio de propagação for dispersivo essa relação não é linear para uma certa gama de frequências podendo a onda obtida ser sempre solução duma equação de onda modificada característica do meio. Por exemplo em certos casos temos que resolver a equação de onda

$$\nabla^2 s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\omega_c^2}{c^2} s(\mathbf{r}, t) \quad (2.14)$$

onde ω_c é uma constante. Podemos verificar que a solução é ainda uma onda plana do tipo de (2.4) mas com a seguinte relação de dispersão

$$|\mathbf{k}|^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2) \quad (2.15)$$

de onde se pode deduzir fácilmente que a relação entre ω e k não é linear para valores de $\omega \leq \omega_c$.

2.3.3 Atenuação

É normal pensarmos que um meio de propagação real, que não seja o vazio, atenua o sinal á medida que este se propaga. Consideremos a seguinte equação de propagação característica de um tal meio

$$\nabla^2 s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial s}{\partial t} \quad (2.16)$$

supondo uma solução da forma

$$s(\mathbf{r}, t) = A \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (2.17)$$

obriga á seguinte relação de dispersão

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\gamma \quad (2.18)$$

Depreende-se fácilmente de (2.18) que o vector de onda deverá ser complexo $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\text{Re}} + j\mathbf{k}_{\text{Im}}$. Igualando as partes reais e imaginárias de (2.18) obtemos a dupla relação

$$\mathbf{k}_{\text{Re}} \cdot \mathbf{k}_{\text{Re}} - \mathbf{k}_{\text{Im}} \cdot \mathbf{k}_{\text{Im}} = \frac{\omega^2}{c^2} \quad 2\mathbf{k}_{\text{Re}} \cdot \mathbf{k}_{\text{Im}} = -\omega\gamma \quad (2.19)$$

supondo que as partes real e imaginária de \mathbf{k} são paralelas, i.e., que $\mathbf{k}_{\text{Im}} = \beta\mathbf{k}_{\text{Re}}$ podemos equacionar (2.19)

$$|\mathbf{k}_{\text{Re}}|^2 = \frac{\omega^2}{(1 - \beta^2)c^2} \quad \frac{2\beta\omega}{(1 - \beta^2)c^2} = -\gamma \quad (2.20)$$

Devido a parte imaginária do vector de onda a solução (2.17) escreve-se com uma amplitude que diminui exponencialmente sob a forma

$$s(\mathbf{r}, t) = Ae^{\mathbf{k}_{\text{Im}} \cdot \mathbf{r}} \exp[j(\omega t - \mathbf{k}_{\text{Re}} \cdot \mathbf{r})] \quad (2.21)$$

A partir de (2.20) podemos deduzir que $\beta \leq 0$ o que significa físicamente que a amplitude da onda diminui na direção de propagação. Na realidade, é frequente encontrar meios de propagação que sofrem simultaneamente de atenuação e de dispersão e cuja equação de onda comporta simultaneamente os termos adicionais de (2.14) e (2.16).

2.3.4 Refração

Apesar de na equação (2.1) termos considerado que a velocidade de propagação c poderia não ser constante, i.e., poderia ser função de \mathbf{r} , ponto de medida da onda, em todo o resto deste capítulo foi suposto que c era constante em todo o ponto do espaço dando origem a um meio de propagação homogéneo. Na realidade, em muitos casos isto é só uma aproximação grosseira, válida em zonas restrictas do espaço e dificilmente válida fora destas. Isto significa que muitos meios de propagação são na realidade não homogéneos o que implica outras distorsões na propagação do sinal. A refração é a modificação sofrida por uma onda quando se aproxima de uma interface entre dois meios que tem diferentes velocidades de propagação.

Figura 2.1: reflexão de ondas

Quando uma onda encontra uma interface com diferentes velocidades de propagação c_i e c_t ela separa-se numa onda reflectida e numa onda transmitida dependendo do ângulo de incidência (figura 2.1). No ponto de incidência, designado por \mathbf{r} temos geralmente que $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$ onde \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_r e \mathbf{k}_t são os vectores de onda para as ondas incidente, reflectida e transmitida respectivamente e \mathbf{r} é o ponto de incidência. Esta relação reduz-se a

$$|\mathbf{k}_i| \sin \theta_i = |\mathbf{k}_r| \sin \theta_r = |\mathbf{k}_t| \sin \theta_t \quad (2.22)$$

como a velocidade de propagação é a mesma para as ondas incidente e reflectida temos que $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_r|$ o que implica que $\theta_r = \theta_i$, i.e., o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Assumindo por hipótese que a frequência de propagação é a mesma de ambos os lados da interface temos que

$$\frac{\sin \theta_i}{c_i} = \frac{\sin \theta_t}{c_t} \quad (2.23)$$

Esta equação é chamada “Lei de Snell”. Um fenómeno análogo ao que se produz quando uma onda encontra um interface de discontinuidade da velocidade de propagação produz-se quando o meio de propagação é caracterizado por uma velocidade de propagação variável. Por exemplo se a velocidade c é uma função de uma das coordenadas, $c(z)$ por exemplo, então o caminho de propagação tem tendência a curvar quando z aumenta. Iste fenómeno característico de meios de propagação não homogéneos fazem com que a propagação se torne bastante complexa e sobretudo em casos onde existe reflexão completa ou parcial em superfícies limitantes do meio de propagação dando origem ao que é normalmente chamada propagação guiada.

2.3.5 Difração

A difração tem como objectivo explicar certos fenómenos físicos como por exemplo porque é que os contornos das sombras são mal definidos ou porque é que podemos “ouvir atrás de esquinas”. A hipótese avançada por Huygens estipula que cada ponto numa frente de onda se comporta como uma fonte secundária de radiação esférica. Esta ideia simples é conhecida pelo nome de Principio de Huygens e está na base da explicação matemática (que não vamos aprofundar aqui) de alguns fenómenos inexplicáveis pela teoria da propagação em linha recta ou pela teoria dos raios (ray theory).

2.3.6 Velocidade de fase e velocidade de grupo

A velocidade de propagação da onda plana pode ser definida pela velocidade á qual os planos de fase constante se deslocam no sentido da propagação da onda. Por isso toma o nome de velocidade de fase e é dada pelo espaço percorrido num intervalo de tempo T igual ao período da onda. Como o espaço percorrido durante T é exactamente um comprimento de onda temos que o módulo da velocidade de fase v_p é

$$|\mathbf{v}_p| = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \quad (2.24)$$

como a velocidade de fase é medida na direção de propagação o vector \mathbf{v}_p terá a mesma direção de \mathbf{k} e assim a partir de (2.24)

$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k} \quad (2.25)$$

A partir da relação (2.24) a velocidade de fase pode ser interpretada como sendo a inclinação de uma recta que liga o ponto (ω, k) á origem. No caso da relação de dispersão linear (2.5) temos que $|\mathbf{v}_p| = c$ no caso de (2.15) a velocidade de fase escreve-se

$$\mathbf{v}_p = \frac{c^2 \omega}{\omega^2 - \omega_c^2} \mathbf{k} \quad (2.26)$$

No caso de ondas dispersivas podemos definir a velocidade de grupo, como a velocidade com a qual se deslocam uma série de ondas planas a frequências próximas. Por exemplo consideremos um sinal $s(\mathbf{r}, t)$ constituído por uma sobreposição de ondas exponenciais complexas propagando na mesma direção com frequências temporais compreendidas numa banda estreita $[\omega_0 - \delta\omega, \omega_0 + \delta\omega]$.

$$s(\mathbf{r}, t) = \int_{\omega_0 - \delta\omega}^{\omega_0 + \delta\omega} \exp[j(\omega t - \mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r})] d\omega \quad (2.27)$$

onde o número de onda \mathbf{k} depende de ω devido á relação de dispersão. Para $\delta\omega$ suficientemente pequeno poderemos fazer a seguinte aproximação

$$\mathbf{k}(\omega) = \mathbf{k}(\omega_0) + \omega' \frac{d\mathbf{k}}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (2.28)$$

para $-\delta\omega \leq \omega' \leq \delta\omega$. Usando esta aproximação podemos escrever (2.27) como

$$s(\mathbf{r}, t) = 2 \exp[j(\omega_0 t - \mathbf{k}(\omega_0) \cdot \mathbf{r})] \frac{\sin \delta\omega \tau}{\tau} \quad (2.29)$$

onde

$$\tau = t - \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (2.30)$$

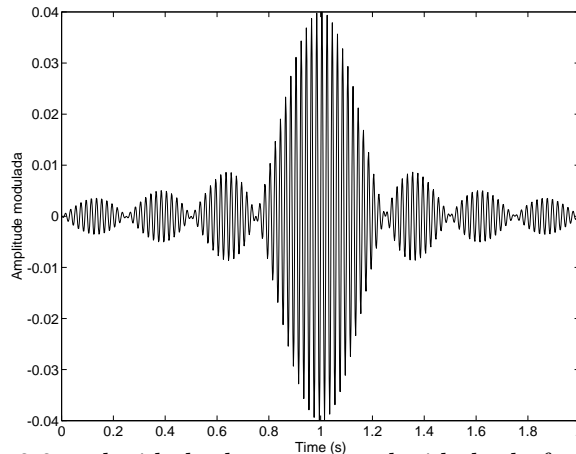


Figura 2.2: velocidade de grupo e velocidade de fase

A figura 2.2 representa a função (2.29) onde se pode notar uma onda moduladora sob a forma de $\sin x/x$ de uma portadora de frequência ω_0 . O pico do envelope produz-se para $\tau = 0$ ou seja para

$$t = \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (2.31)$$

O pico, e na realidade todo o pacote de ondas, desloca-se á velocidade de grupo $\mathbf{v}_g = \mathbf{r}/t$ de tal modo que o vector velocidade de grupo deverá satisfazer a relação

$$\mathbf{v}_g \cdot \frac{d\mathbf{k}}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = 1 \quad (2.32)$$

e portanto o seu módulo pode-se escrever

$$|\mathbf{v}_g| = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \quad (2.33)$$

Enquanto a velocidade de fase tem um interesse puramente matemático a velocidade de grupo representa a velocidade com que a energia se propaga entre a fonte e o receptor.

3. Representação frequencial de campos de ondas espaciais

3.1 Introdução

Sempre que a equação de onda for uma boa representação da evolução do campo de ondas no espaço e no tempo podemos deduzir uma série de implicações importantes no processamento dos sinais recebidos em captadores colocados em diferentes pontos do espaço. O aproveitamento inteligente das características espaciais do campo de ondas no processamento dos sinais recebidos permite retirar destes informações essenciais relativas á fonte emissora, ao meio de propagação e até em alguns casos á forma e posição do(s) receptor(s).

Reconstrução espacio-temporal: sabendo a relação tempo-espaço e pondo o sinal sob a forma (2.8) a sua observação num único ponto ao longo do tempo permite reconstruí-lo no espaço e vice-versa se observarmos o sinal em muitos pontos do espaço podemos reconstruí-lo no tempo.

A velocidade de propagação depende de parâmetros físicos do meio: assim, determinando a direção de propagação podemos inferir a velocidade e portanto a sua dependência do meio e inversamente o calculo empirico da velocidade de propagação pode-nos informar sobre a direção de propagação.

Os sinais tem uma direção de propagação bem determinada: conhecendo o sinal emitido e comparando o sinal recebido em vários pontos do espaço particularmente escolhidos podemos determinar a direção de propagação do campo de ondas. Supondo que podemos determinar a direção de propagação de um sinal em particular temos então a possibilidade de retro-propagar o sinal até á fonte que lhe deu origem.

Fontes radiam o sinal sob a forma de ondas esféricas: esta hipótese é válida na maior parte dos casos “perto” da fonte. Longe da fonte, o campo acústico, pode ser aproximado por um conjunto de ondas planas como as que vimos no capítulo anterior.

O principio de sobreposição é válido: na maior parte dos casos a equação de onda é linear e o principio de sobreposição é válido o que implica que podemos ter um campo acústico formado por um conjunto de ondas sem interacção entre elas.

Meios de propagação com atenuação e dispersão causam distorsões no sinal recebido: a atenuação pode causar a perda total de um sinal a distâncias relativamente curtas da fonte. Em geral a atenuação é função da frequência e aumenta com esta. A dispersão tem como consequência que os sinais se propagam a velocidades diferentes da velocidade c do meio. Mais, esta velocidade é dependente da frequência o que faz com que componentes a frequências diferentes do mesmo sinal cheguem ao receptor a momentos diferentes. O processamento do sinal no receptor deverá ter conhecimento da dispersão do meio para poder detectar eficazmente o sinal emitido a partir do sinal recebido. Em particular algumas componentes frequenciais do sinal podem ser completamente “filtradas” pelo meio de propagação.

3.2 Espaço de “frequência-número de onda”

A transformada de Fourier foi utilizada no passado para representar um sinal temporal no domínio da frequência por uma soma de sinusóides colocadas a frequências espaçadas a intervalos constantes. Por extensão podemos definir uma transformada de Fourier a quatro dimensões permitindo transformar um sinal que se propaga simultaneamente no espaço (3 dimensões) e no tempo (1 dimensão), obtendo o espectro “frequência número de onda” $S(\mathbf{k}, \omega)$

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \int \int s(\mathbf{r}, t) \exp[-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\mathbf{r} dt \quad (3.1)$$

onde uma das integrais é tripla porque diz respeito às três dimensões do vector diferencial $d\mathbf{r}$. O vector número de onda \mathbf{k} pode ser considerado como uma frequência espacial do espaço \mathbf{r} assim como ω é a frequência temporal do tempo t . O espectro $S(\mathbf{k}, \omega)$ é a representação no domínio da frequência (espacial e temporal) do sinal espacio-temporal $s(\mathbf{r}, t)$.

3.3 Espectro número de onda de uma onda plana

Consideremos a onda plana propagando na direção \mathbf{k}_0 á frequência ω_0

$$s(\mathbf{r}, t) = \exp[j(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})] \quad (3.2)$$

Usando a notação de (3.1) a TF de (3.2) pode ser escrita

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \int \int \exp[-j(\omega - \omega_0)t + j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r} dt \quad (3.3)$$

Neste caso a solução de (3.3) é particularmente simples porque as integrais são separáveis para cada uma das dimensões obtendo-se quatro factores do tipo

$$I(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\mu x} dx$$

cuja solução é $I(\mu) = \delta(\mu)$. Assim o resultado de (3.3) escreve-se

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \delta(\omega - \omega_0) \quad (3.4)$$

Este resultado quer dizer que o espectro número de onda de uma onda plana monocromática se reduz a um ponto de coordenadas (\mathbf{k}_0, ω_0) . Temos portanto uma analogia directa entre a sinusóide no domínio temporal que se reduz a um ponto no domínio da frequência temporal e a onda plana que se reduz no domínio frequência número de onda também a um ponto.

Inversamente se o espectro número de onda for integrável podemos calcular a TF inversa e reconstituir o sinal no domínio espacio-temporal

$$s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi^4} \int \int S(\mathbf{k}, \omega) \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\mathbf{k} d\omega \quad (3.5)$$

Esta equação é muito interessante se notarmos que o expoente é exactamente o de uma onda plana. Assim poderíamos dizer que qualquer sinal espacio-temporal pode ser formado por uma soma infinita de ondas planas de (micro) amplitude $S(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega / 2\pi^4$.

3.4 Espectros número de onda particulares

A partir do exposto no capítulo anterior poderemos facilmente imaginar a forma do espectro \mathbf{k} resultante de determinadas formas da equação de dispersão relacionando ω e \mathbf{k} . Por exemplo, se um determinado sinal contiver sómente frequências em torno a uma única frequência ω_0 então o espectro assemelha-se a um plano perpendicular o eixo dos ω cruzando-o para $\omega = \omega_0$. Inversamente se se tratar de um sinal larga banda mas com uma direcção \mathbf{k}_0 privilegiada então o espectro \mathbf{k} tomará a forma de um plano paralelo ao eixo dos ω e interceptando o espaço dos \mathbf{k} para $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$.

Se pelo contrário um sinal omnidireccional se propaga num meio não dispersivo no qual a equação de dispersão é da forma $\omega = ck$ então para cada valor da frequência teremos uma relação linear do tipo

$$\omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (3.6)$$

que não é mais do que a equação de um cone de revolução em torno do eixo dos ω . A abertura do cone depende da velocidade de propagação do meio c (figura 3.1(a)) e este tipo de sinal é chamado isotropico.

Figura 3.1: sinal isotropico omnidireccional (a) ou unidireccional (b)

Se por acaso a banda de frequências for reduzida a $\Delta\omega$ então o espectro \mathbf{k} é uma faixa cuja largura no eixo dos ω é exactamente $\Delta\omega$ e ao limite se for um sinal monocromático o espectro reduz-se a um circulo. Se com a mesma equação de dispersão o sinal for unidireccional o cone do caso precedente reduz-se a uma recta ou a um ponto segundo se for de banda larga ou monocromático respectivamente.

3.5 Filtragem no espaço número de onda

Muitas vezes poderemos ser confrontados com o problema de filtrar um sinal espacio temporal de forma a retirar-lhe certas componentes espectrais. Poderemos querer deixar passar componentes do

sinal útil em certas direções, a certas frequências e a certas velocidades e filtrar o “ruído” indesejável em todas as outras direções e/ou frequências.

Podemos estender directamente o conceito de filtro linear invariante do domínio temporal ao domínio espacio-temporal. Por exemplo, poderemos escrever o sinal filtrado sob a forma

$$Y(\mathbf{k}, \omega) = H(\mathbf{k}, \omega)S(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.7)$$

onde $Y(\mathbf{k}, \omega)$ é o espectro \mathbf{k} do sinal espacio-temporal modificado $y(\mathbf{r}, t)$ que pode ser calculado pela TF inversa a quatro dimensões de $Y(\mathbf{k}, \omega)$. Este sinal encontra-se relacionado com o sinal espacio-temporal original pela equação de convolução a quatro dimensões

$$y(\mathbf{r}, t) = \int \int h(\mathbf{r} - \boldsymbol{\nu}, t - \tau)s(\boldsymbol{\nu}, \tau)d\boldsymbol{\nu}d\tau \quad (3.8)$$

onde $h(\mathbf{r}, t)$ é a resposta impulsional do filtro, i.e., seria a resposta do filtro quanto o sinal $s(\mathbf{r}, t)$ fosse o impulso espacio temporal $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$.

A noção de filtragem espacio-temporal associada com a implementação de $H(\mathbf{k}, \omega)$ é um dos principais objectivos do processamento de sinais multicaptos. Assim, apesar da teoria se deduzir facilmente, por analogia, do dominio temporal, o processamento espacial de sinais contem inúmeros problemas inerentes á realização de filtros no dominio espacial que dificultam largamente a sua realização. No próximo capítulo limitar-nos-emos a casos de filtros simples e realizáveis de modo a manter a complexidade da implementação a nivel aceitável para este curso. Antes disso, e porque já falámos de “ruído” espacio-temporal começaremos por definir um sinal espacio-temporal aleatório e o seu espectro número de onda.

3.6 Campos de onda aleatórios

Um campo de onda aleatório não é mais do que um processo estocástico espacio-temporal. Trata-se portanto de um processo estocástico multidimensional estendendo-se simultaneamente no espaço e no tempo e que poderia ser notado $n(\xi, \mathbf{r}, t)$. Para simplificar a notação a dependência aleatória do acontecimento ξ será omitida sempre que não absolutamente necessária. Óbviamente num determinado ponto do espaço \mathbf{r}_0 a um determinado momento do tempo t_0 , $n(\mathbf{r}_0, t_0)$ será uma varável aleatória de densidade $p(n)$. A extensão das definições usuais de esperança matemática, correlação e covariância fazem-se directamente a partir das relações estabelecidas anteriormente.

Uma noção particularmente importante é a noção de estacionaridade segundo a qual poderemos afirmar que as características estatísticas de, pelo menos, primeira e segunda ordem (no sentido lato) não variam com o instante de medida nem com o ponto de medida no espaço. Neste caso todas as estatísticas relativas não dependem nem do momento nem do ponto absoluto do espaço onde são calculadas mas sómente das diferenças temporais ou espaciais entre os momentos ou pontos de medida. Neste caso a função de autocorrelação do campo de ondas aleatório $n(\mathbf{r}, t)$ pode-se escrever

$$r_{nn}(\boldsymbol{\nu}, \tau) = E[n(\mathbf{r}, t)n(\mathbf{r} + \boldsymbol{\nu}, t + \tau)] \quad (3.9)$$

É particularmente importante neste caso obter uma representação do campo de ondas aleatório no domínio \mathbf{k}, ω . Continuando a analogia com o domínio temporal a representação no domínio \mathbf{k}, ω de uma campo de ondas aleatório faz-se através da densidade espectral de potência (DEP). A DEP $P_{nn}(\mathbf{k}, \omega)$ de um campo de ondas aleatório $n(\mathbf{r}, t)$, por hipótese estacionário, é obtido pela TF (de dimensão quatro) da função de autocorrelação (3.9)

$$P_{nn}(\mathbf{k}, \omega) = \int \int r_{nn}(\boldsymbol{\nu}, \tau) \exp[-j(\omega\tau - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\nu})] d\boldsymbol{\nu} d\tau \quad (3.10)$$

inversamente

$$r_{nn}(\boldsymbol{\nu}, \tau) = \frac{1}{2\pi^4} \int \int P_{nn}(\mathbf{k}, \omega) \exp[j(\omega\tau - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\nu})] d\mathbf{k} d\omega \quad (3.11)$$

Como seria de esperar um tipo interessante de campo de ondas aleatório é aquele cuja função de autocorrelação se escreve

$$r_{nn}(\boldsymbol{\nu}, \tau) = \alpha \delta(\boldsymbol{\nu}, \tau) \quad (3.12)$$

o que obviamente significa que o campo de ondas em questão é não correlado nem no espaço nem no tempo. A sua DEP será constante simultaneamente em direção e frequência.

Outro tipo de campo de ondas frequentemente encontrado na prática é o ruído isotrópico que de forma semelhante ao sinal isotrópico é definido por um campo de ondas aleatório formado por uma infinidade de ondas propagando em todas as direções possíveis com a mesma probabilidade. Neste caso um ruído isotrópico esférico é caracterizado por uma DEP

$$P_{nn}(\mathbf{k}, \omega) = G(\omega) \delta(|\mathbf{k}| - \omega/c) \quad (3.13)$$

neste caso utilizamos uma relação de dispersão linear e $G(\omega)$ representa a dependência da frequência temporal.

A filtragem de campos de onda aleatórios faz-se obviamente no domínio número de onda através de uma relação semelhante a (3.7) onde os espectros são substituídos pelas DEP's obtendo

$$P_{yy}(\mathbf{k}, \omega) = |H(\mathbf{k}, \omega)|^2 P_{nn}(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.14)$$

onde consideramos que ambos os sinais, de entrada e de saída, do filtro eram estacionários.

4. Processamento de antenas de geometria variável

Campos de onda variam no espaço e no tempo e por isso os sistemas de recepção são invariavelmente constituídos por um determinado número de sensores com características bem conhecidas e colocados em posições judiciosamente escolhidas para tentar obter a “melhor” observação possível do campo de ondas em questão. A um conjunto de sensores colocados espacialmente para medir um campo de ondas chama-se uma antena como generalização do termo usado para ondas electromagnéticas. A geometria da antena é um dado essencial na determinação do conteúdo espacial do campo de onda.

4.1 Introdução: aberturas e filtros.

A primeira noção que ocorre quando se pensa numa distribuição espacial de sensores que pretendem medir um campo de ondas que se estende por tudo o espaço é de que a observação vai ser forçosamente espacialmente limitada. Esta noção introduz o facto de que uma observação espacialmente limitada é análoga a uma observação temporalmente limitada e levando portanto á noção de janela espacial. Por outras palavras, a observação do campo de ondas $x(\mathbf{r}, t)$ através de um conjunto de sensores “caracterizado” pela janela espacial $w(\mathbf{r})$ escreve-se

$$z(\mathbf{r}, t) = w(\mathbf{r})x(\mathbf{r}, t) \quad (4.1)$$

que se escreve ainda como a convolução número de onda entre a função janela no domínio número de onda $W(\mathbf{k})$ e a transformada frequência-número de onda do campo de onda

$$Z(\mathbf{k}, \omega) = \int W(\mathbf{k} - \boldsymbol{\nu})X(\boldsymbol{\nu}, \omega)d\boldsymbol{\nu} \quad (4.2)$$

onde

$$W(\mathbf{k}) = \int w(\mathbf{r}) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (4.3)$$

A função (4.3) é vulgarmente chamada *função de abertura* da antena e através de (4.2) pode-se ver que não é mais do que a observação quando o campo é uma onda plana monocromática unidirecional de amplitude unidade. Em regra geral a função de abertura actua como um filtro distorcendo o conteúdo espacial do sinal observado.

Se o campo de ondas for constituído por uma sobreposição de ondas planas,

$$x(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N s_i(t - \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{r}) \quad (4.4)$$

a sua expressão no domínio frequência-número de onda é

$$X(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{i=1}^N S_i(\omega)\delta(\mathbf{k} - \omega\boldsymbol{\alpha}_i) \quad (4.5)$$

A observação deste campo de ondas através da antena de função de abertura escreve-se usando (4.2)

$$Z(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{i=1}^N S_i(\omega) W(\mathbf{k} - \omega \boldsymbol{\alpha}_i) \quad (4.6)$$

Se agora fizermos $\mathbf{k} = \mathbf{k}_j = \omega \boldsymbol{\alpha}_j$ direção privilegiada do sinal j do campo de ondas, então podemos rescrever (4.6) como

$$Z(\mathbf{k}_j, \omega) = S_j(\omega) W(0) + \sum_{i=1, i \neq j}^N S_i(\omega) W[\omega(\boldsymbol{\alpha}_j - \boldsymbol{\alpha}_i)] \quad (4.7)$$

Torna-se interessante notar que se a antena for desenhada de tal forma que a função $W[\omega(\boldsymbol{\alpha}_j - \boldsymbol{\alpha}_i)]$ seja pequena em relação a $W(0)$ então a função da antena é de deixar passar todos os sinais que venham da direção \mathbf{k}_j rejeitando todos os vindos de outras direções. Trata-se neste caso de um filtro espacial.

Os tipos de antenas mais utilizados são sem dúvida as de forma linear e circular. Generalizações da forma linear às antenas planares e volumétricas encontram-se também abundantemente na literatura.

4.2 Resolução, picos laterais e ambiguidade.

A capacidade de uma antena de resolver duas ondas planas de duas direções próximas chama-se resolução. Por outras palavras a função de abertura ideal (em termos de resolução) seria $W(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k})$. Esta função daria no domínio espacial uma antena de extensão infinita e portanto irrealizável na prática. Para definirmos a resolução de uma antena de um modo mais preciso é comum utilizar a definição de Rayleigh, que diz que duas ondas planas se encontram resolvidas quando o pico da segunda não se encontra mais próximo do que o primeiro nulo da primeira. Por outras palavras, adoptando este critério o poder resolvente é igual a metade da largura do pico principal do espectro número de onda resposta a uma onda plana.

Por exemplo para a antena linear de comprimento D colocada colinearmente com o eixo dos x temos que

$$W(\mathbf{k}) = \frac{\sin k_x D/2}{k_x/2} \quad (4.8)$$

de onde se deduz que o poder de resolução desta antena é, segundo Rayleigh de $2\pi/D$.

Tomando como função de abertura ideal o Dirac, $W(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k})$, que tem um único valor $\neq 0$ em todo o espectro número de onda, são chamados picos secundários todos máximos da função de abertura cuja amplitude é inferior á do máximo global. Quando se pretende detectar a presença de um sinal do qual se desconhece a direção, a presença de picos secundários de amplitude próxima da do pico principal contribui para diminuir a probabilidade de deteção do sinal. Assim, é comum

definir como o quociente entre o valor do pico secundário mais alto e o pico principal da função de abertura, a capacidade de rejeição de ruído e interferências indesejadas com o objectivo de deteção de um sinal útil de direção desconhecida.

Por exemplo para o caso da antena linear temos que os picos secundários são determinados quando a derivada da função (4.8) em relação a k_x se anula, i.e., quando

$$\frac{k_x D}{2} \cos\left(\frac{k_x D}{2}\right) - \sin\left(\frac{k_x D}{2}\right) = 0$$

cuja forma está representada na

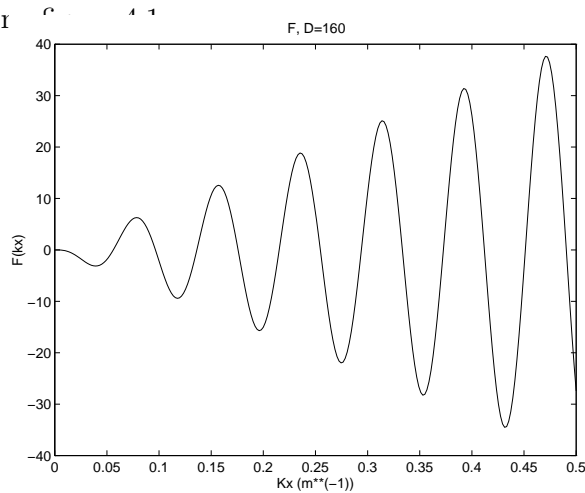


Figura 4.1

Os zeros obtêm-se para $k_x \approx 8.9868/D = 2.86\pi/D$, de onde se obtêm os valor de $|W(\mathbf{k} = 2.86\pi/D)| = 0.2172D$. Assim temos que o quociente de rejeição é

$$Q \approx \frac{D}{0.2172D} \approx 4.603$$

e também $Q(\text{dB}) = 13.26 \text{ dB}$. Sendo este valor independente de D podemos afirmar que uma antena com maior abertura apenas aumenta a resolução mas não aumenta a capacidade de rejeição do ruído ou interferências. Por analogia com o domínio temporal poderemos dizer que o valor do quociente Q pode ser aumentado utilizando “janelas” de observação apropriadas (Hamming, Hanning, Blackman, etc...) admitindo porém uma maior largura do pico central e portanto á custa de uma perda de resolução.

É facilmente compreensível que se dispusermos de, por exemplo, uma antena linear a amplitude da função de abertura para uma onda vinda da direção θ é igual á função de abertura de uma onda vinda da direção $-\theta$. O conjunto de direções que resultam numa mesma resposta por parte da antena é denominado *o conjunto de ambiguidade*.

De forma geral o conjunto de ambiguidade para uma determinada antena é definido completamente pela sua função de abertura determinando os valores de $\boldsymbol{\alpha}_0$ para os quais $W(\mathbf{k} - \omega\boldsymbol{\alpha}_0)$ tem o mesmo valor sabendo que $|\boldsymbol{\alpha}_0| = \text{constante} = 1/c$, c =velocidade de propagação da onda no meio. Esta definição resulta, para o caso da antena linear num cone de revolução centrado na antena (figura

4.2). Os sinais propagando de um lado ou de outro, de cima ou de baixo com o mesmo ângulo não podem ser distinguidos (descriminados) com esta antena.

Figura 4.2

4.3 Focalização e aberrações

Focalização é um termo cujo significado se encontra no sentido geral ligado á óptica. Em geral uma lente é utilizada para focar a energia das ondas luminosas num ponto, chamado ponto focal da lente. Este processo realiza-se graças á difração da luz através de um meio com diferente velocidade de propagação e com ângulos de incidência diferentes fazendo convergir os raios refractados para um único ponto, o ponto focal. O resultado é que a energia chega em fase ao ponto focal devido á diferença de velocidade de propagação resultando num efeito construtivo do sinal, diz-se que se trata de um processamento coerente.

Da mesma forma podemos imaginar que será útil concentrar (ou focalizar) a energia recebida nos vários sensores de uma antena colocados a “grandes” distâncias uns dos outros. Em prática as aberturas serão “grandes” ou pequenas tendo em contas os comprimentos de onda considerados. Assim como uma lente requiere uma grande perfeição no seu fabrico de modo a assegurar uma convergência perfeita no ponto focal assim o conhecimento exacto da posição dos sensores numa antena de grande abertura é também necessário de modo a assegurar um processamento coerente dos sinais recebidos em cada sensor. A precisão tem nestes casos significados diferentes porque estamos também a falar de sinais de diferentes comprimentos de onda, p.ex., $\lambda = 10^{-7}m$ para telescópios ópticos e $\lambda = 15m$ para sensores acústicos submarinos a 100 Hz.

Na prática, o desvio da forma ideal de uma lente provoca uma distorsão no sinal recebido. Da mesma maneira, desvios na posição conhecida dos sensores provocam atrasos temporais que podem modificar a frente de onda de forma significativa. Considerando por exemplo um campo de ondas do tipo $f(\mathbf{r}, t) = s(t - \boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \mathbf{r})$ que sofre atrasos $\Delta(\mathbf{r})$ dependentes da posição \mathbf{r} . Então podemos escrever,

$$z(\mathbf{r}, t) = w(\mathbf{r})f(\mathbf{r}, t) \tag{4.9}$$

Sabendo que o espectro frequência-número de onda de $f(t)$ é definido por

$$F(\mathbf{k}, \omega) = \int \int s(t - \Delta(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \mathbf{r}) \exp \{-j(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} d\mathbf{r} dt \quad (4.10)$$

com uma mudança de variável apropriada chegamos a

$$F(\mathbf{k}, \omega) = S(\omega) \int \exp \{-j\omega\Delta(\mathbf{r})\} \exp \{j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}\} d\mathbf{r} \quad (4.11)$$

O produto espacio temporal de (4.9) origina uma convolução no domínio número de onda que se escreve

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{k}, \omega) &= W(\mathbf{k}) * F(\mathbf{k}, \omega) \\ &= \int W(\mathbf{k} - \boldsymbol{\nu}) F(\mathbf{k}, \omega) d\boldsymbol{\nu} \\ &= S(\omega) \int W(\mathbf{k} - \boldsymbol{\nu}) \left[\int \exp \{-j\omega\Delta(\mathbf{r})\} \exp \{j(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}\} d\mathbf{r} \right] d\boldsymbol{\nu} \\ &= S(\omega) \int \exp \{-j\omega\Delta(\mathbf{r})\} \left[\int W(\mathbf{k} - \boldsymbol{\nu}) \exp \{j(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}\} d\boldsymbol{\nu} \right] d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.12)$$

com uma mudança de variável auxiliar $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{k} - \boldsymbol{\nu}$ obtemos

$$Z(\mathbf{k}, \omega) = S(\omega) \int w(\mathbf{r}) \exp \{-j\omega\Delta(\mathbf{r})\} \exp \{j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}\} d\mathbf{r} \quad (4.13)$$

que poderemos definir como

$$Z(\mathbf{k}, \omega) = S(\omega) W_a(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \quad (4.14)$$

De algum modo obtivemos o resultado segundo o qual a distorsão observada na colocação dos sensores deu origem a uma função de abertura generalizada $w_a(\mathbf{r})$ que não é mais do que a transformada inversa de $W_a(\mathbf{k})$. Esta nova função de abertura generalizada tem em conta a influência de eventuais distorsões da frente de onda devidas a erros na localização dos sensores.

4.4 Amostragem espacial e antenas discretas

Até agora temos vindo a considerar que o vector de posições \mathbf{r} toma valores continuos ao longo do espaço da antena. Isto equivale a considerar que estamos em presença de uma distribuição continua de sensores. Na prática encontraremos muito mais frequentemente distribuições discretas de sensores. A amostragem do caso continuo, como aliás no domínio do tempo, levará a algumas ambiguidades.

Considerando apenas uma dimensão x e um tempo t_0 podemos dizer, em analogia directa com a amostragem temporal, que se o sinal espacio temporal $s(x, t_0)$ não tiver componentes número de onda para $k \geq k_{\max}$ então um intervalo de amostragem espacial constante e igual a $d \leq \pi/k_{\max}$ permitirá reconstruir o sinal continuo $s(x, t_0)$ a partir das suas amostras $s(md, t_0)$. A interpolação espacial faz-se através do análogo filtro sinc espacial,

$$s(x, t_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(md, t_0) \frac{\sin \pi(\frac{x}{d} - m)}{\pi(\frac{x}{d} - m)} \quad (4.14)$$

Podemos então definir, usando a notação \hat{k} para a variável número de onda discreto, o par de transformadas de Fourier

$$S(\hat{k}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) \exp \{j\hat{k}m\} \quad (4.15a)$$

e

$$s(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\hat{k}) \exp \{-j\hat{k}m\} \quad (4.15b)$$

onde o intervalo de integração é igual ao periodo do espectro número de onda discreto e que é $= 2\pi$. Enquanto a variável número de onda continua k se mede em radianos/metro e é igual a 2π vezes a frequência espacial em hertz/m, a variável discreta \hat{k} mede-se em radianos / periodo de amostragem. O conhecido fenómeno de aliasing traduz-se no domínio número de onda por uma sobreposição espectral das repetições periódicas do espectro (a $2\pi/d$) quando o valor máximo de \hat{k} é superior a π/d .

Extensão da amostragem espacial a mais do que uma dimensão obtém-se através de uma generalização directa do caso a uma dimensão.

4.5 Antenas lineares e aleatórias

Neste capitulo vamos analisar mais em detalhe o exemplo particular das antenas lineares primeiro no caso continuo e depois no caso discreto com espaçamento uniforme, não uniforme e aleatório.

No caso continuo trata-se de uma linha cuja função de abertura é diferente de zero só numa extensão finita

$$b(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq D/2 \\ 0, & \text{outro } x \end{cases} \quad (4.16)$$

assim a função de abertura escreve-se

$$w(x, y, z) = b(x)\delta(y)\delta(z) \quad (4.17)$$

O espectro número de onda da função de abertura escreve-se neste caso

$$W(\mathbf{k}) = \int w(\mathbf{r})e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (4.18)$$

ou ainda, substituindo (4.17) em (4.18) e integrando obtém-se

$$W(\mathbf{k}) = D \frac{\sin k_x D/2}{k_x D/2} \quad (4.19)$$

o que significa que o espectro da função de abertura não depende nem de k_y nem de k_z mas apenas sob forma de uma função sinc em função de k_x . Tendo em conta (4.19) podemos afirmar que o poder de resolução é da ordem de $2\pi/D$ e o factor de rejeição é de 4.6, i.e., 13.2 dB.

No caso discreto consideremos uma antena formada de L sensores uniformemente espaçados de uma distância d e colocados ao longo do eixo x . A função de abertura é então

$$w(l, m, n) = b(ld)\delta(m)\delta(n) \quad (4.20)$$

onde

$$b(ld) = \begin{cases} 1, & 0 \leq l \leq L-1 \\ 0, & \text{para outro } l \end{cases} \quad (4.21)$$

calculando a TFD de (4.20) obtém-se

$$W(k_x, k_y, k_z) = \frac{\sin k_x L/2}{\sin k_x/2} \exp\{jk_x(\frac{L}{2} - 1)\} \quad (4.22)$$

que é uma função unicamente de k_x . O módulo de (4.22) tem o seu máximo para $k_x = 0$ onde toma o valor L e os seus zeros laterais encontram-se a $\pm 2p\pi/L$. Assim o poder de resolução é de $2\pi/L$ enquanto que o quociente de rejeição é igual

$$R(L) \approx \left| \frac{W(0)}{W(2.5\pi/L)} \right| \approx \frac{L \sin(5\pi/4L)}{\sin(5\pi/4)} \quad (4.23)$$

que neste caso depende do número de sensores L . $R(L)$ está representada na figura 4.3 para $0 \leq L \leq 100$ onde se pode constatar que tende para um valor constante de aproximadamente 14.88 dB para $L \geq 15$.

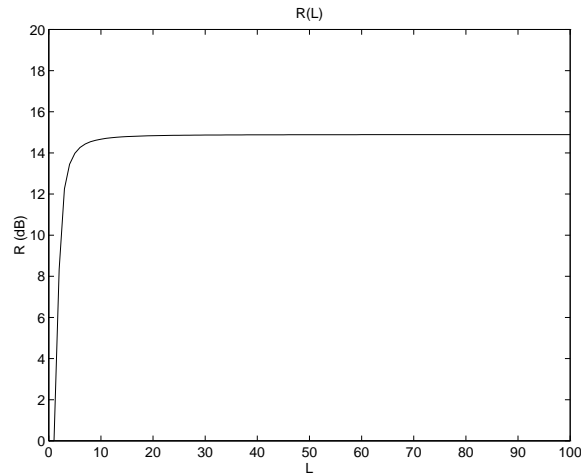


Figura 4.3

O espectro número de onda de (4.23) é uma função periódica de período 2π , isto porque na transformada se fez a hipótese de uma amostragem com $d = 1$, senão o período seria obviamente $2\pi/d$. Pode-se assim determinar a frequência de trabalho máxima sem risco de aliasing que é dada pela inequação

$$k_x \leq \frac{\pi}{d} \rightarrow f \leq \frac{c}{2d} \quad (4.24)$$

onde c é a velocidade de propagação no meio. Do mesmo modo podemos escrever (4.24) sob a forma

$$d \leq \frac{\lambda}{2} \quad (4.25)$$

o que não é mais do que o teorema de Nyquist sob forma espacial e diz-nos qual deverá ser o máximo espaçamento entre sensores para um determinado comprimento de onda, i.e., frequência do sinal.

No caso de uma antena discreta formada de sensores colocados numa linha colinear com o eixo x mas com espaçamento não uniforme pode ser tratado sumariamente considerando a função de abertura

$$w(x) = \sum_{l=0}^{L-1} w_l \delta(x - x_l) \quad (4.26)$$

onde os x_l são as abcissas dos sensores ao longo de x . Um dos problemas ligados a uma distribuição espacial dos sensores é o de saber qual a periodicidade do espectro número de onda de $w(k)$. Basicamente periodicidade existe se $W(k) = W(k + k_0)$ quando $k_0 x_l = 2\pi n_l$ onde n_l é um inteiro positivo para cada valor de l . De uma forma geral trata-se de resolver para k_0 a equação

$$\mathbf{v}k_0 = 2\pi \mathbf{n} \quad (4.27)$$

onde $\mathbf{v}^t = [x_0, x_2, \dots, x_{L-1}]$ e $\mathbf{n}^t = [n_0, n_1, \dots, n_{L-1}]$. Se para uma determinada estrutura espacial, i.e., um determinado \mathbf{v} , a equação (4.27) não tem solução então o espectro número de onda a função de abertura não terá periodicidades o que pode representar uma vantagem na prática.

Podemo-nos questionar do interesse de considerar antenas de geometria aleatória. Efectivamente parecerá lógico (se bem que não provado) que uma antena com uma colocação espacial bem escolhida e produzindo uma função de abertura plenamente conhecida e que preencha os requisitos da aplicação será sempre superior a uma antena de distribuição aleatória. O problema porém é que mesmo que uma distribuição aleatória de sensores não seja a melhor solução ela acontece na prática devido a erros de posicionamento e por isso deverá ser estudada. Vamos supor que L sensores são aleatoriamente distribuídos numa linha de forma em que a sua abcissa segue uma densidade de probabilidade $p(x)$ com suporte numa área finita do eixo x . Supondo que cada sensor é omnidirecional e tem um peso unitário, o espectro da função de abertura escreve-se

$$W(k_x) = \sum_{l=0}^{L-1} \exp\{jk_x x_l\} \quad (4.28)$$

e a sua esperança matemática

$$E[W(k_x)] = LE[\exp\{jk_x x_l\}] \quad (4.29)$$

o que não é mais do que a função característica da variável aleatória que governa o posicionamento dos sensores.

$$E[W(k_x)] = L\Phi_X(k_x) \quad (4.30)$$

o que quer dizer que em média o espectro número de onda da função de abertura de uma antena aleatória é igual ao espectro de uma antena continua e regular na qual a função de abertura é a probabilidade de densidade do posicionamento dos sensores. Para tentarmos determinar o quociente de rejeição de uma antena aleatória consideremos a esperança matemática do módulo ao quadrado do espectro da função de abertura,

$$E[|W(k_x)|^2] = \sum_{l_1, l_2} E[\exp\{jk_x(x_{l_1} - x_{l_2})\}] \quad (4.31)$$

neste somatório teremos L termos iguais a 1 quando $l_1 = l_2$. Os restantes termos são todos iguais a $|\Phi_X(k_x)|^2$ porque sendo as posições dos sensores estatisticamente independentes

$$E[\exp\{jk_x(x_{l_1} - x_{l_2})\}] = E[\exp\{jk_x x_{l_1}\}]E[\exp\{-jk_x x_{l_2}\}] = |\Phi_X(k_x)|^2 \quad (4.32)$$

e portanto

$$E[|W(k_x)|^2] = L + L(L - 1)|\Phi_X(k_x)|^2 \quad (4.33)$$

Nesta expressão podemos notar que L é o mínimo valor que um pico lateral pode tomar. Por outro lado o segundo termo terá o seu valor máximo segundo o valor máximo da função característica que será nesse caso $L(L - 1)$ correspondendo, nesse caso, ao pico principal. Por outras palavras, o pico principal é em média $(L - 1)$ vezes mais alto, e portanto o quociente de rejeição é também em média $20\log(L - 1)$. Este resultado parece dizer que o quociente de rejeição de uma antena aleatória depende essencialmente do número de sensores e não tanto da sua posição. Porém devemos ter em conta que se trata apenas de um valor médio e para termos uma ideia de qual a probabilidade de encontrarmos esse valor médio precisamos de calcular a respectiva variância. O cálculo é longo e fastidioso e o resultado pode ser encontrado em [1, p.104]. Diz-nos em resumo que a variância é muito pequena no pico principal mas muito forte fora deste. Por outras palavras, o módulo ao quadrado do espectro da função de abertura de uma antena aleatória em particular difere muito pouco no pico principal da média mas pode estar tão longe quanto $L(L - 1)$ do seu valor médio nos picos laterais. Torna-se portanto difícil de prever qual o quociente de rejeição de uma determinada antena aleatória.

5. Processamento multicapttores

5.1 Sinais e ruído

É frequente na prática considerar-se que os sinais e o ruído espacial se encontram adicionados ao nível do captor formando assim um sinal medido aleatório do tipo

$$y_l(t) = s_l(t) + n_l(t) \quad (5.1)$$

onde a dependência espacial foi omitida por se admitir que o captor l considerado se encontra no ponto designado por \mathbf{r}_l . Geralmente o ruído é considerado como sendo uma sequência estocástica estacionária no espaço e no tempo, de média nula, Gaussiana e estatisticamente independente do sinal s . Por outras palavras isto significa que o ruído é “visto” nos capttores como vindo de todas as direções enquanto que o(s) sinal(is) tem direções privilegiadas. É esta distinção no espaço que permite um processamento espacial do sinal de forma a extrair o sinal útil do ruído ambiente. Os sinais úteis podem ser determinísticos, como tem sido considerados até aqui, ou aleatórios. Na maior parte dos casos a estrutura dos sinais úteis como por exemplo a amplitude, a fase, a banda de frequências são desconhecidas e deverão ser estimadas a partir dos sinais recebidos nos capttores. Este constitui o verdadeiro problema do processamento multicapttores.

O sinal amostrado, recebido no captor l pode-se escrever

$$y_l(t_n) = \sum_{i=0}^{N_s-1} s_i(l, t_n) + n_l(t_n) \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (5.2)$$

Cada um dos N_s sinais recebidos pode não ser originário de uma fonte mas resultar da reflexão de um sinal num obstáculo o que faz que alguns dos sinais possam estar relacionados entre si. Além disso cada sinal depende do captor através de um atraso devido á propagação inter-capttores. Assim se o trazo do sinal i entre a origem e o sensor l é $\Delta_i(l)$ podemos dizer que $s_i(l, t_n) = s_i(t_n - \Delta_i(l))$ onde

$$\Delta_i(l) = \frac{\boldsymbol{\xi}_i \cdot \mathbf{r}_l}{c} \quad (5.3)$$

onde $\boldsymbol{\xi}_i$ é a direção aparente da fonte i . Um problema é quando a velocidade de propagação c varia de um captor ao outro o que torna impossível de determinar a direção de propagação porque como já foi referido qualquer algoritmo de processamento só pode determinar o quociente entre a direção e a velocidade de propagação e sem conhecer nenhum deles não se pode determinar o outro. A sequência temporal dos sinais pode-se condensar numa matriz tri-dimensional $L \times N \times N_s$,

$$\mathbf{S}(t_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_0(0) & \mathbf{s}_1(0) & \dots & \mathbf{s}_{N_s-1}(0) \\ \mathbf{s}_0(1) & \mathbf{s}_1(1) & \dots & \mathbf{s}_{N_s-1}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{s}_0(L-1) & \mathbf{s}_1(L-1) & \dots & \mathbf{s}_{N_s-1}(L-1) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

onde L é o número de sensores, N é o número de amostras temporais, N_s é o número de sinais presentes no campo de ondas. e onde a coluna do sinal i medido no sensor l é a sequência temporal começando no instante t_0 que se escreve $\mathbf{s}_i(l)^t = [s_i(l, t_0), \dots, s_i(l, t_{N-1})]$. Utilizando esta notação e definindo o vector $\mathbf{1}$, de dimensão $N_s \times 1$, tal que $\mathbf{1}^t = [1, \dots, 1]$, podemos dizer que o vector observação $L \times 1$ em que cada linha é um sensor $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{S}(t_0)\mathbf{1} + \mathbf{n}(t_0)$. A matriz de correlação espacio-temporal no instante t_0 com as hipóteses descritas acima escreve-se

$$\mathbf{R}(t_0) = E[\mathbf{S}(t_0)\mathbf{1}\mathbf{1}^t\mathbf{S}^t(t_0)] + \mathbf{R}_n \quad (5.5)$$

onde \mathbf{R}_n é a matriz de correlação espacio-temporal do ruído e que é independente do instante de medida devido á hipótese de estacionaridade. A matriz (5.5) é de dimensão $L \times L$ e é composta por um termo relativo aos sinais e um termo de ruído. O termo relativo aos sinais exprime a correlação inter sinais, que, se os sinais forem estocásticos e não correlados pode tomar uma forma diagonal simples. Se alguns dos sinais forem resultantes de reflexões múltiplas então a estrutura da matriz de correlação dos sinais é não diagonal e traduz a interligação entre os diferentes sinais e de algum modo os parâmetros físicos do meio que provocaram a correlação dos sinais.

De uma forma bastante semelhante, e para o mesmo sinal, podemos definir a matriz de correlação espacio-espectral $\mathbf{R}(\omega)$ como

$$\mathbf{R}(\omega) = E[\mathbf{y}(\omega)\mathbf{y}^H(\omega)], \quad (5.6)$$

i.e., trata-se da esperança matemática do produto cruzado entre o vector das observações e o seu transposto conjugado no domínio da frequência. Em prática, e de maneira algo pouco correcta porque estamos a trabalhar com sinais aleatórios, poderíamos dizer que o espectro de (5.2) se escreve

$$y_l(\omega) = \sum_{i=0}^{N_s} S_i(\omega)e^{-j\omega\Delta_i(l)} + N_l(\omega) \quad (5.7)$$

onde usámos a expressão $s_i(l, t) = s_i(t - \Delta_i(l))$. Definindo uma matriz

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e^{-j\omega\Delta_0(0)} & \dots & e^{-j\omega\Delta_{N_s-1}(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\omega\Delta_0(L-1)} & \dots & e^{-j\omega\Delta_{N_s-1}(L-1)} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

cujos vectores coluna $\mathbf{d}_i^t = [e^{-j\omega\Delta_i(0)}, \dots, e^{-j\omega\Delta_i(L-1)}]$ representam o atraso de fase devido á propagação de uma onda plana de amplitude unidade medida nos sensores $l = 0, \dots, L-1$. Podemos agora escrever o vector de observação

$$\mathbf{y}(\omega) = \mathbf{D}\mathbf{S}(\omega) + \mathbf{N}(\omega) \quad (5.9)$$

onde $\mathbf{S}(\omega)^t = [S_1(\omega), \dots, S_{N_s-1}(\omega)]$ e finalmente a matriz (5.6) rescreve-se simplesmente

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{D}\mathbf{C}_s(\omega)\mathbf{D}^H + \mathbf{R}_n(\omega) \quad (5.10)$$

onde $\mathbf{C}_s(\omega)$ é a matriz de intercorrelação espectral dos sinais recebidos nos sensores, i.e., $\mathbf{C}_s(\omega) = E[\mathbf{S}(\omega)\mathbf{S}^H(\omega)]$ e define o grau de coerência existente entre os sinais recebidos o que permite inferir alguma informação sobre a sua origem e eventual grau de reflexões múltiplas, etc...

Em geral a semelhança entre as matrizes de correlação espacio-temporal e espacio-espectral permite de não ter em conta se o processamento é feito no domínio do tempo ou no domínio da frequência. As únicas considerações a ter em conta dizem respeito á natureza dos sinais, e em particular ao seu conteúdo espectral: se se tratarem de sinais do tipo banda estreita o processamento no domínio frequencial é muito mais “económico” enquanto para sinais de banda larga torna-se indiferente o processamento temporal ou frequencial.

5.2 Processamento multicaptoreos coerente

Consideremos uma onda plana á frequência ω_0 e de direção $\boldsymbol{\xi}_0$ recebida em L captoreos distribuidos num plano nas posições indicadas por $\{\mathbf{r}_l; l = 1, \dots, L\}$. O sinal recebido é perturbado por um ruído estacionário de média nula, independente do sinal e não correlado no espaço e no tempo. Assim o sinal recebido no captor l escreve-se

$$y_l(t) = s_l(t) + n(t) \quad (5.11)$$

Com a ajuda de (5.3) podemos escrever

$$y_l(t) = s(t - \Delta_l) + n(t) \quad (5.12)$$

com $\Delta_l = \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \mathbf{r}_l/c$. É frequente usar como medida quantificadora do ruído num determinado sinal, a relação sinal/ruído (SNR=signal-to-noise ratio) ao nível do captor l definida por

$$\text{SNR}_{y_l} = \frac{\int |s_l(t)|^2}{\int |n_l(t)|^2} \quad (5.13)$$

que não é mais do que o quociente da potência do sinal e da potência do ruído recebidos no dito captor.

Conhecendo a direção $\boldsymbol{\xi}_0$ da onda e dispondo dos sinais recebidos nos L captoreos poderíamos melhorar substancialmente o SNR ao nível do captor através do processamento coerente dos $y_l(t)$ na direção $\boldsymbol{\xi}_0$ formando

$$b_0(t) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L y_l(t + \Delta_l) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L s(t) + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L n_l(t + \Delta_l) \quad (5.14)$$

O primeiro termo desta expressão é simplesmente $s(t)$ e o segundo, tendo em conta as propriedades de estacionaridade e não correlação espacio-temporal, é um processo aleatório cuja variância é igual á variância do ruído $n(t)$ dividida pelo número de captoreos L . Então, se calcularmos o SNR de $b_0(t)$, obtemos que o numerador é igual ao de (5.13) e o denominador é L vezes mais pequeno e portanto

$$\text{SNR}_{b_0} = L \times \text{SNR}_{y_l} \quad (5.15)$$

A conclusão é que o processamento coerente dos sinais recebidos nos L captoreos traz um ganho em relação sinal ruído de L , ou em dB's, $10 \log L$.

5.3 Beamforming

O problema na prática para podermos proceder ao processamento coerente é que em geral desconhecemos a direção da onda plana e que é muitas exactamente o que queremos determinar. Para compreendermos a solução deste problema precisamos de voltar um pouco atrás e notarmos que o procedimento utilizado no sub-capítulo anterior para a direção ξ_0 poderia ser repetido para uma outra direção ξ_1 . Se da direção ξ_1 não chegar nenhuma onda plana então a potência recebida vai ser da ordem da variância de $n(t)$ dividida por L !... Repetindo este procedimento para todas as direções possíveis (2π se considerarmos apenas o plano horizontal) poderemos obter uma série de máximos e mínimos segundo houver sinal+ruido ou só ruido. Por outras palavras, nós podemos, sem conhecer a direção do sinal, “varrer” todas as direções possíveis (adaptando os atrasos Δ_l) e determinar as direções das quais a potência recebida é máxima. Esta operação toma o nome de “beamforming” que se poderia traduzir por *formação de feixes* e que traduz a ideia de que ao colocarmos um certo conjunto de atrasos nos captosres estamos efectivamente a “olhar” para uma determinada direção ou a *formar um feixe nessa direção*.

Podemos então escrever a saída do beamformer como

$$b(t, \theta) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L y_l(t - \Delta_l(\theta)) \quad (5.16)$$

onde θ é a direção de coerência do beamformer e que pode variar dentro de um determinado intervalo que depende essencialmente da posição relativa dos captosres. A implementação (5.16) do beamformer é chamada “atraso e soma” (delay-sum) e consiste na mais simples possível.

5.4 Beamforming no domínio da frequência

Se calcularmos a TF de (5.16) obtemos

$$B(\omega, \theta) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L Y_l(\omega) e^{-j\omega \Delta_l(\theta)} \quad (5.17)$$

esta expressão não é tão óbvia de obter como parece porque sendo o sinal $y(t)$ ele mesmo aleatório a sua TF não existe e sómente a DEP faz sentido. A notação em (5.17) é um pouco abusiva mas leva-nos ao resultado certo. O que desejamos ver em (5.17) é que se trata de uma transformada de Fourier discreta se fizermos o expoente da exponencial proporcional ao índice l . Por exemplo, $\Delta_l(\theta) = \xi_\theta \cdot \mathbf{r}_l / c$ se fizermos \mathbf{r}_l coincidente com o eixo das abcissas então o ângulo entre \mathbf{r}_l e ξ_θ é igual exactamente a θ e podemos escrever $\Delta_l(\theta) = |\xi| |\mathbf{r}_l| \sin \theta / c$. Se além disso $|\mathbf{r}_l| = ld$ onde d é uma constante então temos que

$$B(\omega, \theta) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L Y_l(\omega) \exp[-j\omega \frac{ld}{c} \sin \theta] \quad (5.18)$$

Podemos notar que (5.18) não é mais do que uma TF análoga á de (3.1) que nos permite passar do domínio espacial, em \mathbf{r}_l , para o domínio número-de-onda ou das direções θ . Em termos práticos torna-se fácil calcular $B(\omega, \theta)$ a partir de $y_l(t_n); l = 1, \dots, L$ usando uma dupla FFT: uma de tempo para frequência e uma de espaço para número de onda.